

DEMID MATH | Analysis

Funktionen, Ableitungen, Integrale

Kurvendiskussion

Карта исследования функции для ЕРМ

 f'

ЧТО ТЫ ДОЛЖЕН УМЕТЬ ПОСЛЕ ЭТОГО PDF

немецкие термины + русский смысл + экзаменационная запись

demidmath.com

 D_f область f' рост f'' форма W перегиб

Сохрани как рабочую карту темы

Здесь собрана не теория ради теории, а маршрут решения: что означает пункт Kurvendiskussion, какое уравнение записать и как оформить ответ на ЕРМ.

Главная идея: сначала понять условие, потом считать производные, затем записать интервалы, точки и короткий Antwortsatz.

1. Переведи

немецкое условие

2. Посчитай

 D_f , f' , f'' , интервалы

3. Оформи

точки и Antwortsatz

ЕРМ

Что такое Kurvendiskussion?

Что это.

Kurvendiskussion - это полное исследование функции: область определения, нули, асимптоты, интервалы, точки экстремума и перегиба.

Как делать.

Сначала собираем базу графика: D_f , Nullstellen, Asymptoten. Потом через f' и f'' получаем интервалы и точки.

Как писать на EPM.

На EPM нужен не только расчёт, но и запись:

f ist monoton steigend für $x \in (a, b) \cup (c, d)$.

$H(x_0|f(x_0))$ или $W(x_0|f(x_0))$.

Как читать знак объединения

Если свойство выполняется на нескольких отдельных интервалах, записываем их через

$\cup$.

Например:

$$x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty).$$

Это читается так: “ x принадлежит первому интервалу или второму интервалу”.

Мини-словарь: немецкие слова, которые встречаются постоянно

Немецкий термин	По-русски	Что делать
Definitionsmenge	область определения	значения x , при которых функция существует; сначала исключить запрещённые x
Nullstelle	ноль функции	решить $f(x) = 0$ и записать $N(a 0)$
Polstelle	полюс, вертикальный разрыв	найти запрещённый x , где $f \rightarrow \pm\infty$
Asymptote	асимптота	записать прямую, к которой стремится график
Verhalten im Unendlichen	поведение на бесконечности	смотреть $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$
Ableitung	производная	найти $f'(x)$; она показывает наклон и изменение функции
Monotonie	промежутки роста и убывания	по знаку $f'(x)$ записать интервалы
Extremstelle	только координата x	решить $f'(x) = 0$ и проверить знак
Extrempunkt	максимум или минимум	решить $f'(x) = 0$, проверить знак f' , затем посчитать $y = f(x)$
Wendepunkt	точка перегиба	решить $f''(x) = 0$ и проверить смену знака f''
Sattelpunkt	перегиб с горизонтальной касательной	проверить Wendepunkt и $f'(x_0) = 0$
hebbare Lücke	устранимый разрыв	сократить общий множитель; это не Polstelle
Tangente	касательная	использовать $k = f'(x_0)$ и точку $(x_0 f(x_0))$
Normale	нормаль	взять отрицательный обратный наклон $k_n = -1/k$

Главный маршрут

1. **Definitionsmenge** - где функция существует.
2. **Nullstellen** - где $f(x) = 0$.
3. **Polstellen** и **Asymptoten** - если есть дроби или разрывы.

4. **Verhalten im Unendlichen** - что происходит при $x \rightarrow \pm\infty$.
5. $f'(x)$ - первая производная.
6. **Monotonie** - интервалы, где функция растёт и убывает.
7. **Extrempunkte** - максимумы и минимумы.
8. $f''(x)$ - вторая производная.
9. **Krümmung** - куда изогнут график.
10. **Wendepunkte** и **Sattelpunkte**.
11. **Skizze** - итоговый рисунок.

! Главная ошибка

Не смешивай три разные вещи:

- x - место на оси;
- $f(x)$ - высота графика;
- $f'(x)$ и $f''(x)$ - инструменты для анализа, а не координаты точки.

Если нашёл x через производную, координату y всё равно считаешь через исходную функцию $f(x)$.

Формула

$f' > 0 \Rightarrow \text{steigend}$, $f' < 0 \Rightarrow \text{fallend}$, f'' prüft Krümmung

Когда

когда нужно записать Monotonie, Extrempunkte, Krümmung или Wendepunkte

ЕРМ-запись

$x \in I_1 \cup I_2$; Punkte immer als $(x|f(x))$

Ошибка

написать только знак производной без интервалов и без Vorzeichenwechsel

Definitionsmenge

Что такое Definitionsmenge?

Что это.

Definitionsmenge D_f - это все значения x , при которых функция существует. Если значение x запрещено, его нельзя использовать дальше в исследовании.

Как делать.

Проверяем тип функции:

- дробь: знаменатель не должен быть равен нулю;
- корень чётной степени: выражение под корнем должно быть ≥ 0 ;
- логарифм: аргумент должен быть > 0 ;
- обычный многочлен: обычно $D_f = \mathbb{R}$.

Как писать на EPM.

Пример записи:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

Частая ошибка.

Нельзя сначала находить производные, а потом вспоминать про область определения. Запрещённые точки делят интервалы для Monotonie и Krümmung: через разрыв нельзя записывать один общий интервал.

Пример

Если

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2},$$

то $x = 2$ запрещён, потому что знаменатель равен нулю.

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

Nullstellen

Что такое Nullstelle?

Что это.

Nullstelle - это значение x , при котором функция равна нулю. На графике это пересечение с осью x .

Как делать.

Решаем уравнение:

$$f(x) = 0.$$

Если функция дробная, обычно достаточно приравнять числитель к нулю, но только после проверки, что знаменатель в этой точке не равен нулю.

Как писать на ЕРМ.

Если $x = a$ - ноль функции, точка записывается так:

$$N(a|0).$$

Частая ошибка.

Если функция дробная, сначала проверь, что найденный x не запрещён. Запрещённая точка не может быть Nullstelle.

Polstellen und Asymptoten

Что такое Polstelle?

Что это.

Polstelle - это запрещённое значение x , рядом с которым функция уходит к $+\infty$ или $-\infty$. Чаще всего Polstellen появляются у дробных функций.

Как делать.

Для дроби:

1. найди запрещённые значения из знаменателя;
2. проверь, можно ли сократить общий множитель;
3. если после сокращения разрыв исчезает, это не Polstelle, а **hebbare Lücke**;
4. если функция уходит к бесконечности, это Polstelle.

Как писать на EPM.

Вертикальная асимптота записывается так:

$$x = a.$$

Частая ошибка.

Не каждое запрещённое значение автоматически является Polstelle. Сначала проверь сокращение.

Какие бывают асимптоты?

Что это.

Asymptote - это прямая, к которой график приближается. В этом конспекте нас интересуют именно прямые: вертикальные, горизонтальные и наклонные.

Как делать.

Основные типы:

- **senkrechte Asymptote**: $x = a$, обычно из Polstelle;
- **waagrechte Asymptote**: $y = c$, поведение при $x \rightarrow \pm\infty$;
- **schräge Asymptote**: $y = kx + d$, если график приближается к наклонной прямой.

Как писать на EPM.

Для рациональной функции сравни степени числителя и знаменателя:

- степень числителя меньше: $y = 0$;

- степени равны: отношение старших коэффициентов;
- степень числителя на 1 больше: делаем Polynomdivision.

Как записывать поведение около Polstelle?

Что это.

Около вертикальной асимптоты важно смотреть на функцию с двух сторон: слева и справа.

Как делать.

Если Polstelle находится при $x = a$, проверяем:

$$x \rightarrow a^- \quad \text{и} \quad x \rightarrow a^+.$$

Результат может быть разным:

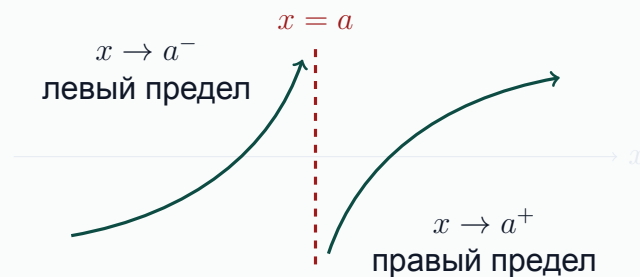
$$f(x) \rightarrow +\infty \quad \text{или} \quad f(x) \rightarrow -\infty.$$

Как писать на EPM.

Пример записи:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty.$$

Polstelle: смотри слева и справа



Verhalten im Unendlichen

Что значит Verhalten im Unendlichen?

Что это.

Мы смотрим, что происходит с функцией далеко справа и далеко слева:

$$x \rightarrow +\infty, \quad x \rightarrow -\infty.$$

Это помогает найти горизонтальные и наклонные асимптоты.

Как делать.

Для рациональных функций часто достаточно сравнить степени. Для других функций смотрим главный член или предел.

Как писать на EPM.

Если

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c,$$

то справа есть горизонтальная асимптота:

$$y = c.$$

Аналогично проверяем $x \rightarrow -\infty$.

Частая ошибка.

Не всегда поведение при $+\infty$ и $-\infty$ одинаковое. Проверь обе стороны, если задача этого требует.

Наклонная асимптота

Если после Polynomialdivision получается:

$$f(x) = kx + d + \frac{r(x)}{q(x)}$$

и

$$\frac{r(x)}{q(x)} \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \pm\infty,$$

то наклонная асимптота:

$$y = kx + d.$$

Ableitung

Зачем нужна первая производная?

Что это.

Ableitung $f'(x)$ показывает наклон графика. Через первую производную мы понимаем, где функция растёт, где убывает и где могут быть Extrempunkte.

Как делать.

Сначала надо именно найти производную для данной функции:

$$f(x) \implies f'(x).$$

Потом уже смотрим её знак и нули.

Смысл знака:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \text{график растёт}$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \text{график убывает}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \text{кандидат на Extrempunkt}$$

Как писать на ЕРМ.

Производная сама по себе не является ответом. После неё обязательно делаем вывод:

f ist monoton steigend/fallend ...

$H(\dots|\dots)$ или $T(\dots|\dots)$.

Monotonie

Как найти Monotonie?

Что это.

Monotonie описывает интервалы, где функция возрастает или убывает. Для этого нужен знак первой производной.

Как делать.

1. Найди $f'(x)$.
2. Реши $f'(x) = 0$.
3. Добавь запрещённые точки из D_f .
4. Раздели область определения на интервалы.
5. Проверь знак $f'(x)$ на каждом интервале.

Как писать на ЕРМ.

Запись:

f ist monoton steigend für $x \in (a, b) \cup (c, d)$.

f ist monoton fallend für $x \in (e, g)$.

Если интервал только один, знак $\cup$ не нужен.

Частая ошибка.

Нельзя писать только $f'(x) > 0$: на экзамене нужен интервал, где это выполняется.

Про запрещённые точки

Запрещённые точки не являются Extremstellen, но они разрезают область определения. Поэтому для Monotonie мы делим интервалы и по нулям f' , и по точкам, которых нет в D_f .

Пример

Если знак f' такой:

$$(-\infty, -1) : +, \quad (-1, 2) : -, \quad (2, \infty) : +,$$

то функция:

f ist monoton steigend für $x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$,

f ist monoton fallend für $x \in (-1, 2)$.

⊞ Как из знаков получить интервалы

Интервал	$(-\infty, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, \infty)$
Знак f'	+	-	+
Вывод	steigt	fällt	steigt

 f' f'

☑ $f' > 0$ и $f' < 0$

$f'(x) > 0$

 график растёт

$f'(x) < 0$

 график убывает

Знак f' переводится не в одну точку, а в интервалы роста и убывания.

Extrempunkte

❏ Что такое Extremstelle и Extrempunkt?

Что это.

Extremstelle - это только значение x . **Extrempunkt** - это полная точка на графике с координатами $(x|y)$.

Как делать.

Сначала ищем кандидатов:

$$f'(x) = 0.$$

Потом проверяем смену знака f' ; на закрытом интервале границы проверяются отдельно.

Как писать на ЕРМ.

если $f' : + \rightarrow -$, то Hochpunkt

если $f' : - \rightarrow +$, то Tiefpunkt

После этого считаем:

$$y = f(x_0).$$

Частая ошибка.

$f'(x_0) = 0$ - это ещё не доказательство Extrempunkt. Нужна смена знака или другой достаточный тест.

❏ Как использовать вторую производную для Extrempunkte?

Что это.

Вторая производная может быстро определить тип Extrempunkt, но только если

уже известно, что $f'(x_0) = 0$.

Как делать.

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) > 0 \Rightarrow T(x_0|f(x_0)).$$

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) < 0 \Rightarrow H(x_0|f(x_0)).$$

Частая ошибка.

Если $f''(x_0) = 0$, этот тест не решает задачу: возвращаемся к Vorzeichenwechsel von f' .

Е Мини-вывод для ЕРМ

После проверки знаков удобно писать так:

$$f' : + \rightarrow - \Rightarrow H(x_0|f(x_0)).$$

$$f' : - \rightarrow + \Rightarrow T(x_0|f(x_0)).$$

Если знак f' не меняется, обычного Hochpunkt/Tiefpunkt нет.

I Zweite Ableitung und Krümmung

i Что показывает вторая производная?

Что это.

$f''(x)$ показывает, как меняется наклон графика. Через неё мы определяем кривизну и Wendepunkte. Интуитивно: положительная вторая производная загибает график вверх, отрицательная - вниз.

Как делать.

$$f''(x) > 0 \Rightarrow \text{linksgekrümmt}$$

$$f''(x) < 0 \Rightarrow \text{rechtsgekrümmt}$$

Как писать на EPM.

Запись:

$$f \text{ ist linksgekrümmt für } x \in (a, b) \cup (c, d).$$

$$f \text{ ist rechtsgekrümmt für } x \in (e, g).$$

Несколько интервалов снова объединяем через $\cup$.

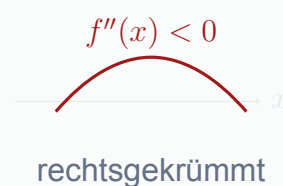
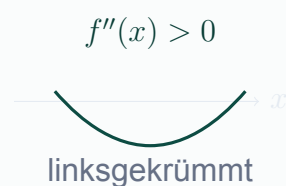
Частая ошибка.

Как и в Monotonie, нужен интервал, а не просто знак в одной точке.

± Короткая таблица для Krümmung

Знак	$f''(x) > 0$	$f''(x) < 0$
Кривизна	linksgekrümmt	rechtsgekrümmt
На EPM	интервал с $f'' > 0$	интервал с $f'' < 0$

v $f'' > 0$ и $f'' < 0$



Wendepunkt und Sattelpunkt

Что такое Wendepunkt?

Что это.

Wendepunkt - это точка, где график меняет кривизну: с linksgekrümmt на rechtsgekrümmt или наоборот. Важно: $f''(x_0) = 0$ даёт только кандидата. Главное - смена знака f'' .

Как делать.

1. Найди $f''(x)$.
2. Реши $f''(x) = 0$.
3. Проверь Vorzeichenwechsel von f'' .
4. Подставь найденный x_0 в $f(x)$.

Как писать на ЕРМ.

$$W(x_0|f(x_0)).$$

Частая ошибка.

$f''(x_0) = 0$ даёт только кандидата. Без смены знака f'' Wendepunkt обычно не подтверждён.

Чем Sattelpunkt отличается от Wendepunkt?

Что это.

Sattelpunkt - это Wendepunkt с горизонтальной касательной. То есть f'' меняет знак и одновременно $f'(x_0) = 0$.

Как писать на ЕРМ.

Если $W(x_0|f(x_0))$ и дополнительно $f'(x_0) = 0$, то можно записать:

$$S(x_0|f(x_0)).$$

Частая ошибка.

Sattelpunkt не является Hochpunkt или Tiefpunkt. Он не максимум и не минимум, потому что монотонность не меняется как у Extrempunkt.

Tangente und Normale

Как найти Tangente?

Что это.

Tangente - это касательная к графику в точке x_0 . Её наклон равен $f'(x_0)$.

Как делать.

Формула:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Сначала считаем $f(x_0)$, потом $f'(x_0)$, затем подставляем в формулу.

Как писать на ЕРМ.

Если в условии дана Tangente $y = kx + d$, то сразу можно записать:

$$f'(x_0) = k.$$

Наклонный коэффициент связан с углом:

$$k = \tan(\alpha).$$

Так можно найти угол между касательной и осью x ; для угла между двумя прямыми сравнивают их наклоны.

Как найти Normale?

Что это.

Normale - это прямая, перпендикулярная касательной.

Как делать.

Если $f'(x_0) \neq 0$, то наклон нормали:

$$k_n = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

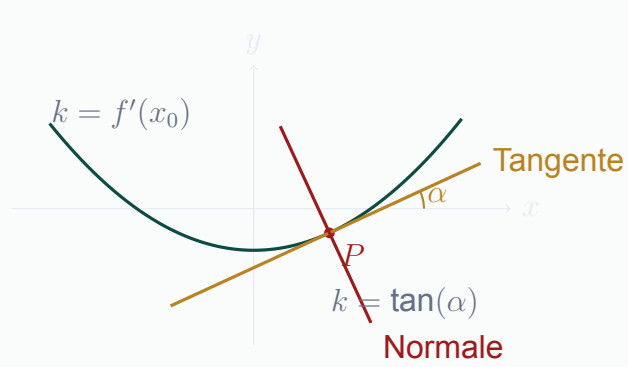
Как писать на ЕРМ.

Если $f'(x_0) = 0$, нормаль вертикальная:

$$x = x_0.$$

Частая ошибка.

Формула $k_n = -1/f'(x_0)$ не работает при $f'(x_0) = 0$.

Tangente, Normale и угол

I Перевод условий EPM

M Фраза в задании $\Rightarrow$ математическая запись

Формулировка	Что сразу записать
$P(a b)$ auf Graph von f	$f(a) = b$
f berührt g bei $x = a$	$f(a) = g(a)$ и $f'(a) = g'(a)$
Graph berührt x -Achse bei $x = a$	$f(a) = 0$ и $f'(a) = 0$
Tangente hat Steigung k	$f'(a) = k$
Tangente parallel zu $y = kx + d$	$f'(a) = k$
Steigungswinkel ist α	$f'(a) = \tan(\alpha)$
symmetrisch zur y -Achse	$f(-x) = f(x)$; bei Polynom: нечётные коэффициенты = 0
Extrempunkt bei $x = a$	$f'(a) = 0$ + Vorzeichenwechsel prüfen
Hochpunkt / Tiefpunkt bei $x = a$	$f'(a) = 0$ и знак f' меняется $+$ $\rightarrow$ $-$ или $-$ $\rightarrow$ $+$
Wendepunkt bei $x = a$	$f''(a) = 0$ + Vorzeichenwechsel von f''
Sattelpunkt bei $x = a$	Wendepunkt и zusätzlich $f'(a) = 0$

I Полный мини-пример

i Функция, область определения и асимптоты

Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 16}.$$

Что это.

Знаменатель не должен быть равен нулю:

$$x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x = \pm 4.$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}.$$

Как делать.

Нули функции:

$$\frac{x^3}{x^2 - 16} = 0 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Так как $0 \in D_f$, получаем:

$$N(0|0).$$

Polstellen:

$$x = -4, \quad x = 4.$$

Polynomdivision:

$$f(x) = x + \frac{16x}{x^2 - 16}.$$

Значит, наклонная асимптота:

$$y = x.$$

Как писать на ЕРМ.

Поведение около Polstellen:

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = +\infty.$$

Monotonie und Extrempunkte

Что это.

Сначала находим первую производную:

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 48)}{(x^2 - 16)^2}.$$

Кандидаты:

$$x = -4\sqrt{3}, \quad x = 0, \quad x = 4\sqrt{3}.$$

Как делать.

Знаменатель квадратный, поэтому знак f' задаёт числитель $x^2(x^2 - 48)$. С учётом запрещённых точек -4 и 4 получаем:

$$f \text{ ist monoton steigend für } x \in (-\infty, -4\sqrt{3}) \cup (4\sqrt{3}, \infty).$$

$$f \text{ ist monoton fallend für } x \in (-4\sqrt{3}, -4) \cup (-4, 0) \cup (0, 4) \cup (4, 4\sqrt{3}).$$

Таблица знаков для f' .

Интервал	Знак f'	Вывод
$(-\infty, -4\sqrt{3})$	+	steigt
$(-4\sqrt{3}, -4)$	-	fällt
$(-4, 0)$	-	fällt
$(0, 4)$	-	fällt
$(4, 4\sqrt{3})$	-	fällt
$(4\sqrt{3}, \infty)$	+	steigt

Как писать на ЕРМ.

Смена знака f' :

$$+ \rightarrow - \text{ при } x = -4\sqrt{3} \Rightarrow H(-4\sqrt{3} | -6\sqrt{3}).$$

$$- \rightarrow + \text{ при } x = 4\sqrt{3} \Rightarrow T(4\sqrt{3} | 6\sqrt{3}).$$

Частая ошибка.

При $x = 0$ производная равна нулю, но знак f' не меняется. Значит, обычного Hochpunkt или Tiefpunkt там нет.

Кривизна, Точка перегиба и итог

Что это.

Вторая производная:

$$f''(x) = \frac{32x(x^2 + 48)}{(x^2 - 16)^3}.$$

Как делать.

Знак f'' даёт:

f ist linksgekrümmt für $x \in (-4, 0) \cup (4, \infty)$.

f ist rechtsgekrümmt für $x \in (-\infty, -4) \cup (0, 4)$.

Таблица знаков для f'' .

Интервал	Знак f''	Вывод
$(-\infty, -4)$	—	rechtsgekrümmt
$(-4, 0)$	+	linksgekrümmt
$(0, 4)$	—	rechtsgekrümmt
$(4, \infty)$	+	linksgekrümmt

Как писать на EPM.

Единственный кандидат на Wendepunkt:

$$x = 0.$$

Знак f'' меняется с + на —, поэтому:

$$W(0|0).$$

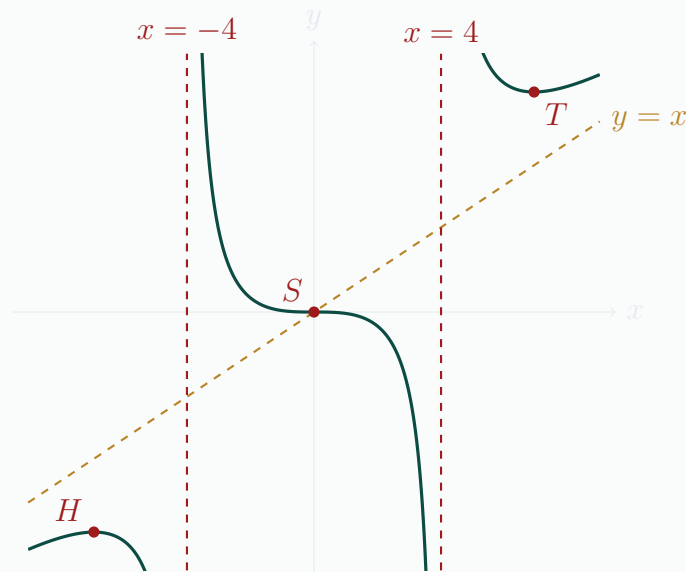
Так как $f'(0) = 0$, это Sattelpunkt:

$$S(0|0).$$

Итог:

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$;
- Nullstelle: $N(0|0)$;
- Polstellen: $x = -4$ и $x = 4$;
- schräge Asymptote: $y = x$;
- Hochpunkt: $H(-4\sqrt{3}| -6\sqrt{3})$;
- Tiefpunkt: $T(4\sqrt{3}|6\sqrt{3})$;
- Sattelpunkt: $S(0|0)$.

Итоговый эскиз графика



эскиз по функции; пересечение с $y = x$ в $S(0|0)$ здесь возможно

3 ошибки на этом примере

- $x = -4$ и $x = 4$ нельзя подставлять в $f(x)$: этих точек нет в D_f .
- $x = 0$ из $f'(x) = 0$ не даёт Extrempunkt, потому что знак f' не меняется.
- Координаты H , T , W и S считаются через исходную функцию $f(x)$, а не через $f'(x)$ или $f''(x)$.

Ещё один реальный ЕРМ-тренажёр

В свежем варианте встречался тот же тип задачи для функции

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 4}.$$

Нужно было найти D_f , Asymptoten, Nullstellen, Extrempunkte и сделать Skizze. Короткая проверка:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}, \quad x = -2, x = 2, \quad y = 1.$$

Nullstellen нет, потому что $x^2 + 2 \neq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Единственный Extrempunkt:

$$H(0 | -\frac{1}{2}).$$

Короткие ловушки

ex $f'(x) = 0$, но **Extrempunkt** нет

$$f(x) = x^3, \quad f'(x) = 3x^2, \quad f'(0) = 0.$$

Но f' не меняет знак: слева и справа $f'(x) > 0$. Значит, обычного **Hochpunkt** или **Tiefpunkt** нет. Здесь может быть **Sattelpunkt**, но не **Extrempunkt**.

ex $f''(x) = 0$, но **Wendepunkt** нет

$$f(x) = x^4, \quad f''(x) = 12x^2, \quad f''(0) = 0.$$

Но f'' не меняет знак: слева и справа $f''(x) > 0$. Значит, **Wendepunkt** нет. При этом минимум у $x = 0$ возможен, потому что это другой вопрос.

ex **Запрещённая точка**, но не **Polstelle**

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}.$$

$x = 1$ запрещён в исходной функции, но после сокращения разрыв исчезает. Это **hebbare Lücke**, не **Polstelle**, поэтому вертикальной асимптоты $x = 1$ нет.

Как оформить ответ красиво

Готовые ЕРМ-шаблоны

Что нужно записать	Шаблон ответа
Definitionsmenge	$D_f = \mathbb{R} \setminus \{a, b\}$
Monotonie	f ist monoton steigend/fallend für $x \in (a, b) \cup (c, d)$
Krümmung	f ist linksgekrümmt/rechtsgekrümmt für $x \in (a, b)$
Extrempunkt	$f'(x_0) = 0$ + Vorzeichenwechsel von f' ; Punkt: $H/T(x_0 f(x_0))$
Wendepunkt	$W(x_0 f(x_0))$ + Vorzeichenwechsel von f''
Polstelle	senkrechte Asymptote: $x = a$; Grenzwerte links/rechts prüfen
Asymptote	waagrecht: $y = c$; schräg: $y = kx + d$
Tangente	$t : y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Главное правило оформления

Не оставляй ответ в виде промежуточного вычисления. На ЕРМ нужен вывод: интервал, точка, асимптота или Satz.

Финальная шпаргалка

М Самое важное в одной таблице

Что ищем	Признак или действие
Definitionsmenge	исключить запрещённые x
Nullstelle	решить $f(x) = 0$
Polstelle	запрещённый x , где $f \rightarrow \pm\infty$
Monoton steigend	$f'(x) > 0$ на интервале
Monoton fallend	$f'(x) < 0$ на интервале
Несколько интервалов	записывать через $\cup$, например $(a, b) \cup (c, d)$
Extrempunkt	$f'(x) = 0$ + Vorzeichenwechsel von f'
Hochpunkt	f' меняется $+$ $\rightarrow$ $-$
Tiefpunkt	f' меняется $-$ $\rightarrow$ $+$
Linksgekrümmt	$f''(x) > 0$ на интервале
Rechtsgekrümmt	$f''(x) < 0$ на интервале
Wendepunkt	$f''(x) = 0$ + Vorzeichenwechsel von f''
Sattelpunkt	Wendepunkt + $f'(x_0) = 0$
Tangente	$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
Normale	$k_n = -1/f'(x_0)$, если $f'(x_0) \neq 0$
Координата y	всегда подставить x в исходную функцию $f(x)$

! За что снимают баллы

- нет **Definitionsmenge**;
- найден x , но не найден y через исходную функцию $f(x)$;
- координату y считают через f' или f'' вместо исходной f ;
- написан только знак f' или f'' , но не указаны интервалы;
- нет проверки **Vorzeichenwechsel**.

Страница для сохранения

Kurvendiskussion: 6 проверок перед сдачей

Сохрани эту страницу и проверь решение перед сдачей.

1. D_f : все запрещённые значения исключены до производных
2. $y = f(x)$: координату y считаю через исходную функцию
3. Monotonie и Krümmung записаны интервалами, а не точками
4. отдельные интервалы объединены через знак $\cup$
5. Extrempunkt и Wendepunkt подтверждены через Vorzeichenwechsel
6. точка записана как $(x|y)$; Stelle - это только x

Самопроверка

✓ Строки для ЕРМ-решения

Не решай полностью. В каждом пункте запиши строку, которую можно поставить в решение.

1. Дана $f(x) = \frac{1}{x-3}$. Запиши D_f и вертикальную асимптоту.
2. В условии: **Hochpunkt bei** $x = 2$. Что нужно записать через f' и что проверить?
3. Таблица знаков: $f' > 0$ на $(-\infty, 1)$ и $f' < 0$ на $(1, \infty)$. Какой это Extrempunkt?
4. При $x = 0$ знак f'' меняется с $-$ на $+$. Какой вывод и как записать точку?
5. Условие: Tangente bei $x = a$ ist parallel zu $y = 3x - 1$. Какое уравнение сразу записать?

A Antworten

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$; Polstelle и senkrechte Asymptote: $x = 3$.
2. $f'(2) = 0$ и проверка $f' : + \rightarrow -$.
3. Hochpunkt, потому что f' меняется $+$ $\rightarrow$ $-$.
4. Кандидат на Wendepunkt подтверждён сменой знака f'' ; точка: $W(0|f(0))$.
5. $f'(a) = 3$.

Встрой тему в маршрут подготовки

ЕРМ проверяет не отдельные формулы, а связи

После этого PDF переходи к варианту: условие, модель, вычисление, оформление ответа.

1. PDF

2. Klausur

3. Fehler

4. Wiederholen

Маршрут подготовки к ЕРМ

В Telegram выкладываю новые PDF, разборы Klausuren и типовые ошибки. На сайте - общий план подготовки и логика тем.

Сайт: demidmath.com

Материалы: t.me/demidmath



Telegram

demidmath.com

demidmath.com

f'